Il problema a una fase. Continuità Lipschitz delle soluzioni

1. Il laplaciano come misura

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica in Ω. Allora, Δu è una misura (positiva) di Radon su Ω. Inoltre, per quasi ogni $0 < r < R$ vale la formula

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u \; - \fint_{\partial B_r(x_0)} u = \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \Delta u(B_s(x_0))\, ds,$$

dove ω_d è la misura della palla unitaria B_1 in $\mathbb{R}^d$. Possiamo anche evitare l'utilizzo di questo fatto. In alternativa, si pùo usare il lemma seguente.

Lemma 1. *Sia $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che:*

$$\varphi = 1 \quad su \quad B_1\ , \qquad \varphi = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^d \setminus B_2\ , \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad su \quad B_2 \setminus B_1\ .$$

Definiamo, inoltre, la funzione

$$\varphi_r(x) = \varphi(rx).$$

Allora,

$$\varphi = 1 \quad su \quad B_r\ , \qquad \varphi = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^d \setminus B_{2r}\ , \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad su \quad B_{2r} \setminus B_r\ .$$

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica in Ω in senso delle distribuzioni, ovvero

$$\langle \Delta u, \psi\rangle := -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi\, dx \ge 0 \quad \text{per ogni funzione non-negativa} \quad \psi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Allora, per ogni $x_0 = 0 \in \Omega$, si ha la formula

$$\fint_{\partial B_R} u \; - \fint_{\partial B_r} u \le \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \langle \Delta u, \varphi_s\rangle\, ds,$$

dove ω_d è la misura della palla unitaria B_1 in $\mathbb{R}^d$.

Lemma 2. *Sia $u \in H^1(B_{2R})$, $u \ge 0$, un minimo di $\mathcal{F}$ in B_{2R}. Allora Δu è una misura positiva e localmente finita su B_{2R} ed esiste una costante dimensionale $C_d \ge 0$ tale che*

$$\Delta u\big(B_R\big) \le C_d R^{d-1}.$$

2. Stima della media di u

Lemma 3. *Sia $u \in H^1(B_R)$, $u \ge 0$, un minimo di $\mathcal{F}$ in B_R. Allora, esiste una costante dimensionale $C_d \ge 0$ tale che*

$$0 \le \fint_{\partial B_r} u(x)\, dx - u(0) \le C_d r^{d-1} \quad \text{per ogni} \quad r \in \Big(0, R/2\Big).$$

Lemma 4. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^d$. Se x_n è una successione che converge a $x_\infty \in \Omega$ ed è tale che*

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = 0,$$

allora $u(x_\infty) = 0$.

Proof. Fissiamo $r > 0$. Per il lemma precedente, per ogni $x_n > 0$, abbiamo

$$\fint_{B_r(x_n)} u(x)\, dx \le \fint_{\partial B_r(x_n)} u(x)\, dx \le u(x_n) + C_d r^{d-1}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\fint_{B_r(x_\infty)} u(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \fint_{B_r(x_n)} u(x)\, dx \le \lim_{n\to\infty} u(x_n) + C_d r^{d-1} = C_d r^{d-1}.$$

Passando al limite per $r \to 0$,

$$u(x_\infty) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_\infty)} u(x)\, dx = 0.$$

$\square$

Corollario 5. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^d$. Allora, l'insieme*

$$\Omega_u := \{u > 0\}$$

è un aperto e la funzione u è armonica su Ω_u.

Proof. Per il lemma precedente, abbiamo che l'inssieme $\{u = 0\}$ è (relativamente) chiuso in Ω. Qiundi $\{u > 0\}$ è un aperto. Per dimostrare che u è armonica su $\{u > 0\}$ consideriamo una funzione $\varphi \in C^\infty_c(\Omega \cap \{u > 0\})$. Sia $\mathcal{K}$ il supporto di φ. Osserviamo che

$$\inf_{x \in K} u(x) > 0,$$

Infatti, se $x_n \in \mathcal{K}$ è una successione tale che $u(x_n) \to 0$, allora per il lemma precedente ci sarebbe un punto $x_\infty \in \mathcal{K}$ tale che $u(x_\infty) = 0$ il che è impossibile siccome $\mathcal{K}$ è un compatto contenuto in $\{u > 0\}$. Di conseguenza, per $\varepsilon \in \mathbb{R}$ di valore assoluto abbastanza piccolo si ha che

$$\{u + \varepsilon\varphi > 0\} = \{u > 0\}.$$

Quindi, per l'ottimalità di u abbiamo che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla (u + \varepsilon\varphi)|^2 \, dx.$$

□

3. Continuità Lipschitz di u.

Proposizione 6. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ un minimo locale di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^d$. Allora, la funzione u è localmente lipschitziana in Ω.*